3 次関数のグラフ—総括—

課題　a, b, c にいろいろな値を入れて 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを観察し、グラフの形や x 軸との共有点の有無等について、各自の理解できる範囲で a, b, c との関係において分類せよ。

1　はじめに

この課題をやる段階で、3 次関数のグラフがどのようになるかを皆さんはすでに知っています。そのグラフの形状と係数 a, b, c がどのように関わっているかを、数ナビを通して探究してもらうことを目的とした課題でした。数学に関してこのような課題は始めてだと思うので、どのように回答すべきかとまどった人も多かったことでしょう。他の人はこの課題にどのような考え方をしたか、参考までに皆さんのレポートを紹介しておきます。

2　どのように考えるべきか

手あたり次第にグラフを表示させる

思いつくままに係数を決めて、いろいろなグラフを表示させてみる。これが、まず最初に行われるべきことかもしれません。しかし、それだけでは、係数 a, b, c とグラフの形状との一般的な関係は出てきません。

係数を一つずつ変えてみる

課題の目的は、係数とグラフの形状との関係を調べることです。それなら、係数を少しずつ変えてグラフがどう変わるかを観察してみよう、という考えが起こってくるでしょう。たとえば、$y = x^3 + 2x^2 + 4x + 6$ のグラフを基準にして、係数を少しずつ変えてグラフがどう変わるかを調べてみよう。このような立場で調べたのは—菊地 (美)、佐藤 (裕)、曽根、照井、圓子、村上 (功)。

係数に 0 があるかどうかで分類する

係数との関係を探るのが目的ですから、$x^3 + ax^2, x^3 + bx, x^3 + c$ のように特定の係数だけ残して他は 0 の場合を考えてみるのも有効でしょう—及川 (隆)。そうすると、$x^3 + ax^2 + bx, x^3 + ax^2 + c$ などのように 0 でない係数が増えるとどうなるかが気になってくるでしょう。そこで係数に 0 がどのような形で含まれるかで細かく分類しようという考えがでてきます—瀬戸、吉田 (裕)、高橋 (順)。0 でない項が増えていくことによりグラフがどう変化するかを観察するのも有効です—萩原。

係数の符号で分類する

$a > 0, b > 0, c < 0$ などのように、各係数の符号のあり方で細かく分類する考えもあるでしょう—今井、小岩、手嶋、畠山、吉田 (裕)、佐々木 (勉)、東谷。特に、東谷はあらゆるケースを網羅的に調べています。

係数の大小関係で分類する

$a > b > c$ などのように、各係数の大小関係のあり方を細かく分類する考え方もあります—鹿口、白鳥、鈴木 (健)、旭澤。

係数の一致、不一致で分類する

$a = b, b \fallingdotseq c$ のように、係数の中に一致するものがあるかどうかで細かく分類して調べた人もいます—手嶋、小野寺 (諒)、佐藤 (進)、前田、村上。

係数の c を除いて分類する

係数 c はグラフの上下の移動だけですから、基本的な形は $y = x^3 + ax^2 + bx$ だけを調べればよいことに気づき、a, b の関係だけを調べている人もいます—渡辺 (文)、照井 (剛)。肝心な部分は何かを念頭に置いて調べることは大事なことです。

その他のこと

多くの人は、係数が簡単な整数の場合しか考えていません。特定の簡単な係数のグラフではなく一般的な性質を調べるのが目的ですから、係数はいろいろなケースを調べるべきです。整数ではない場合 (1.001 など) や、大きな整数 (100 など) も考慮したのは、佐藤 (秀) だけでした。x 軸との交点の座標まで調べた人は佐藤 (真)、佐々木 (修)、極値を調べた人は菊地 (貴)、佐藤 (真)、y' のグラフも考慮した人は三浦でした。

3　どのようなことに気づいたか

いろいろなグラフを表示させて細かく分類して、結局どのようなことが分かったのでしょうか。「分類せよ」という課題だったので分類だけで終えている人が多いのですが、結局 a, b, c の役割は何であるかを記すことが必要です。

- 係数 a が増えると、山なりになる—山口、渡辺 (文)、圓子。b, c を固定して a を少しずつ大きくしていくと、このことが見えてきます。
- 係数 b の部分でグラフの傾きが急になる—小野寺 (拓)、菊地 (美)、佐藤 (秀)、佐藤 (裕)、曽根、山口、渡辺 (文)、圓子。このことは、多数のグラフを表示させてみないと気がつかないことです。また、各係数の役割に注意を払っていないと気がつかないことでしょう。
- グラフの形状は係数 b の符号で決まる。グラフに山や谷が現れるかどうかには、b の符号が大きく関与しています。このことに気がついたのは手嶋だけでした。
- 係数 c は y 切片である—佐藤 (秀)、佐藤 (裕)、曽根、諸見里、山口、千田、菅原 (諭)。特に曽根は、c はグラフの形状には関係がないと記しています。このことには気がついても、あえて書かなかった人も多いかもしれません。何が分かったかを細かくメモすることは、いろいろなことを調べる場合には極めて重要なことです。
- グラフ自体のことではないが、この課題を通して基本が分かれば解るはずであること、また基本を発展させることの大切さに気づいたのは—藤原 (剛)。これは、数学のみならず、ものごとを考える場合の基本です。また、曽根はいろいろ調べてみて、何が分かって何が分からないかを明確に区別しています。このような態度も、もの事を考察するときの基本です。
- この課題自体の意図に疑問を感じた人もいます—今井。何かの指示を実行する場合、指示された事を単純に行うのではなく、その指示を自分が納得して行うことは重要です。場合によっては、その指示自体が誤っているかもしれません。おかしいと思いながら指示されたので実行したら、実はとんでもないミスをおかしてしまったというのは、新聞報道でみる大事故によく見られることです。ちなみに、この課題の意図は、いろいろと調べる操作を通して、「考える」ことをさせようということにあります。

4　多かった間違い

個別から一般へ

具体的な関数について表示させてグラフの特徴を見たとき、その特徴は係数全般でいえるでしょうか。$y = x^3 + 2x^2 + 2x$ のグラフだけをもとにして、$a = b$ の場合のことを結論づけてよいのでしょうか。$a = b$ なら同様のグラフだろうとするのなら、「本当にそうだろうか？」と思い、2 以外のいろいろなケースについて調べてみることが必要です。負の場合も大きい場合も小さい場合も同様なのであれば、そこで始めて、$a = b$ の場合に一般に成立するのではないかという確信が持てるわけです。

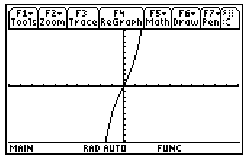

図 1$(a=b=2)$

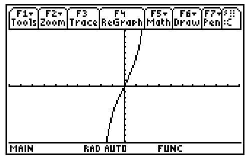

図 1a $(a=b=1)$

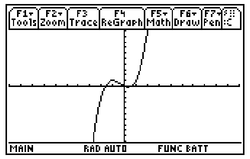

図 1b $(a=b=-1)$

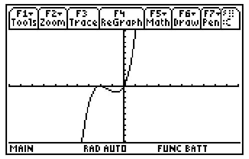

図 1c $(a=b=4)$

この関数の場合、$a=b=1$ では同じようなグラフですが、$a=b=-1$ と負数にするとグラフが違います。$a=b=4$ でも違います。つまり、$a=b$ という条件だけではグラフの形状は規定できないということになります。そこで、グラフの形状を分けているのは、一体 a,b がどういう場合なのだろうかと、さらに疑問が湧いてくることになることになるわけです。

同様のことは、$a>b$ のように a,b の大小で分類している場合や、$a>0, b>0$ のように、a,b の符号で分類している場合にもあてはまります。

その意味では、多くの人の分類のあり方には問題があったといえます。

数ナビの表示するグラフの信用度

具体的に係数を決めて数ナビに表示させるわけですから、グラフ自体が誤って表示されることはないでしょう。問題は、その読み取り方です。$y=x^3+3x^2+x$ のグラフを標準画面で表示すると図 2 のようになりますが、この関数は原点で接していると思ってよいでしょうか。$y=x^3+2x^2+x$ は図 3 のようになりますが、これは $y=x^3$ のグラフと類似形であると思ってよいのでしょうか。それぞれ拡大してみると図 2a〜3a のようになり、かなり違った様相を示しているのが分かります。

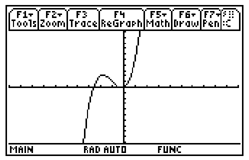

図 2

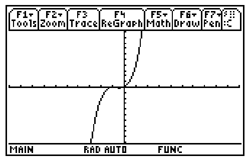

図 3

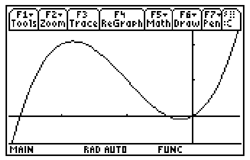

図 2a

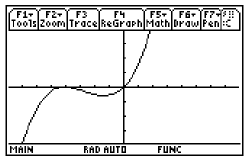

図 3a

表示されたグラフを全面的に信用してはいけません。式の形から x 軸と交わるのか、接するのかの判断は自分で行い、表示されたグラフについて「ちょっとおかしい」と感じる判断力が必要です。

5 どのように考えて欲しかったか

いろいろな考え方がありますが、こちらで期待したのは以下のようなものでした。

まず、微分法により関数のグラフを描く方法を、皆さんはすでに知っているわけです。できればそれとの関連で調べて欲しかったと思います。

c の役割

c は $x=0$ のときの y の値ですから、y 軸との交点の座標であることは明らかでしょう。

極値との関わり

グラフの形状分類ということであれば、山や谷の部分の有無こそが最も重要部分です。山や谷は y' の符号の変わる箇所ですから極値の判定そのものです。$y'=3x^2+2ax+b$ ですから、$y'=0$、つまり 2 次方程式 $3x^2+2ax+b=0$ が 2 つの実数解をもてば、極大・極小となる点があることになり、山や谷が現れることになります。2 次方程式が 2 つの実数解を持つのはどういう場合でしょうか。2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ において、根号内 (1 年で学んだ判別式) が正であれば 2 つの実数解があります。

$y'=0$ の場合は、$D=(2a)^2-4\cdot 3\cdot b=4a^2-12b=4(a^2-3b)>0$ なら、2 つの実数解を持ちます。つまり、山や谷が現れるのは $a^2>3b$ の場合です。特に $b<0$ の場合は、つねに $a^2-3b>0$ なので、a の符号によらず必ず y は極値を持ちます。

係数を変えながらの探究

y' のことに思い至らなくとも、係数を微妙に変えていって、山や谷の現れる境界の値を調べることは可能でした。たとえば $y=x^3+3x^2+x$ のグラフをもとに、$b=1$ は固定して $a=3$ の値を少しずつ下げていくと、$a=1$ では極値がなくなるので、極値の有無の別れ目は $a=1$ と $a=2$ の間であることが分かります。そこで $a=1.8$ などと、さらに少しずつ下げていけば $a=1.7320$ のときに極値がなくなることが分かるでしょう。$b=1$ なので $a^2=3b=3$、よって $a=\sqrt{3}=1.7320\cdots$ のときであることが $a^2=3b$ であることを知らずとも気がつくことは可能だったのです。

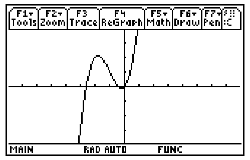

図 4 $(a=3, b=1)$

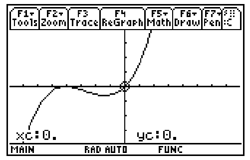

図 4a $(a=2, b=1)$

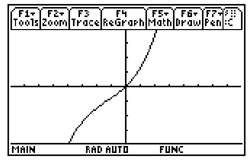

図 4b $(a=1, b=1)$

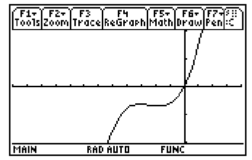

図 4c $(a=1.8, b=1)$

y' は y の変化率 (接線の傾き) なので、y' の値が大きいほど y の増加は急です。$y'=3x^2+2ax+b$ より b は y' のグラフの上下の動きと関わっているので、a を固定すれば b が大きいほど同じ x に対する y' の値は大きくなります。つまり y の増加の程度は、b が大きいほど急であることになります。下図は、$y=x^3+3x^2+x$ において、$b=1$ の値を 1 ずつ増やしていったときのものです。

また、$a^2-3b>0$ のときに極値を持つので、b を固定して a を増やすと極値を持つようになってきます。a を増やすと「山なりになる」という指摘は正しい見方です。

このように、数ナビを使うと、1 つずつ丹念に調べるということが容易に可能になるのです。

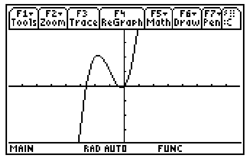

図 5 $(a=3, b=1)$

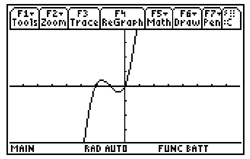

図 5a $(a=3, b=2)$

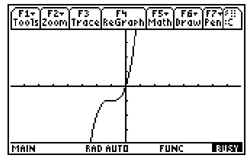

図 5b $(a=3, b=3)$

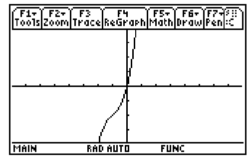

図 5c $(a=3, b=4)$

x 軸との交点の数

x 軸との交点について言えば、3 次関数のグラフは x 軸と少くとも 1 点で交わります。グラフをみれば明かですが、何が明らかで何が明らかではないかを明確に認識しておくことは重要なことです。

$\mathrm{solve}(f(x),x)$ 機能について説明しました。この機能を使うと、どの 3 次関数も必ず因数分解できることに気づくでしょう。そして、さらに注意すると、すべて 1 次式の積になる場合と、1 次式と 2 次式の積になる場合があることに気づくでしょう。グラフとの関連でみると、(実数の範囲で因数分解できない)2 次式を因数に持つ場合のグラフは、x 軸と 1 箇所でしか交わっていないことが分かるはずです。

この辺りのことにも気づいてくれることを期待したのですが、残念ながらここまで言及した人はいませんでした。

6 おわりに

できるだけ、個人名を上げて課題レポートの状況をまとめてみました。参考になったでしょうか。同じことを書いているのに自分の名前がないという人は申し出てください。

次回の課題からは、最後にできるだけ「考察」も書くようにして下さい。